ジェネリック構造と $NSOP_4$ (体のモデル理論とその応用)

池田, 宏一郎

数理解析研究所講究録
第1794巻 2012年 28-42

ジェネリック構造と $NSOP_4$
(Generic structures and $NSOP_4$)

池田宏一郎*
(Koichiro Ikeda)
法政大学経営学部
(Faculty of Business Administration, Hosei University)

SOP_n (n-strong order property) は，非単純理論を分類するために Shelah によって導入された概念である ([10]).

一方，ジェネリック構成法は Hrushovski によって開発された構成法 ([6, 7]) で，単純理論への応用として，Hrushovski はある関数 f に対して SU ランク1で可算範疇的なジェネリック構造 M_f を構成した ([8]).

Hrushovski の作ったジェネリック構造は単純 (simple) であるが，関数 f の選び方で $\mathrm{Th}(M_f)$ は単純になる場合もあれば非単純になる場合もある.

よって，$\mathrm{Th}(M_f)$ が SOP_n によってどのように分類されるか，という問題が自然に考えられる．これに対して，Evans-Wong は，$\mathrm{Th}(M_f)$ が可算範疇的ならば SOP_4 をもたないことを証明した ([3]).

本稿では，この Evans-Wong の結果を一般化した次の定理を解説する：ジェネリック構造の理論が有限閉包性をもつならば SOP_4 をもたない.

この結果は John Baldwin 氏との共同研究によって得られた.

1 Preliminaries

ジェネリック構成法の基本事項について書かれた論文として [1, 2, 4, 5, 9, 11] などがある．ここで使われる記法や定義は主に [1, 11] に従う.

局所次元，閉，閉包 L を relational な可算言語とする．ここで考える L-構造 A は各 $R \in L$ に対して対称的かつ非反射的であるとする．すなわち

*The author was supported by Grants-in-Aid for Scientific Research (No. 23540164).

- $A \models R(\bar{a})$ ならば $\bar{a}$ の各元はみな異なる.
- 各置換 σ に対して，$A \models R(\sigma(\bar{a}))$.

をみたす.

L-構造 A と n 項関係 $R \in L$ に対して，R^A を A のサイズ n の部分集合で R をみたすものの全体の集合とする．有限構造 A の局所次元 δ を

$$\delta(A) = |A| - \sum_{R \in L} \alpha_R |R^A|$$

と定義する.（ここで各 α_R は 1 以下の正の実数.）$\delta(A/B) = \delta(A \cup B) - \delta(B)$ と表記する.

構造 $A \subset B$ に対して，A が B で閉（あるいは strong）であるとは

$$\delta(X/A \cap X) > 0 \text{ for any finite } X \subset B$$

をみたすこととする．記号で $A \leq B$ と書く．このとき

- $A \leq B \leq C$ ならば $A \leq C$;
- $A \leq C$ かつ $B \subset C$ ならば $A \cap B \leq C$.

が成り立つ．よって，$A \subset B$ に対して，A を含む最小の $C \leq B$ が存在する．そのような C を A の B における閉包と呼び，$\mathrm{cl}_B(A)$ と書く.

融合性，ジェネリック構造，超均質性　$\mathbf{K}_0$ をその部分構造の局所次元の値がすべて非負である有限 L-構造全体のクラスとする．$\mathbf{K}$ を部分構造に関して閉じている $\mathbf{K}_0$ の部分クラスとする.

このとき，$(\mathbf{K}, \leq)$ が融合性をもつとは，$A \leq B \in \mathbf{K}$ かつ $A \leq C \in \mathbf{K}$ ならば，B および C を A 上 strong に埋め込める $D \in \mathbf{K}$ が存在することである.

$(\mathbf{K}, \leq)$ が融合性をもつとき，次をみたす可算 L-構造 M が存在する：

- 任意の有限な $A \subset M$ は $\mathbf{K}$ に属す.
- $A \leq B \in \mathbf{K}$ かつ $A \leq M$ ならば B は A 上 strong に M に埋め込める.
- M は有限閉包性をもつ．すなわち，任意の有限な $A \subset M$ に対して $|\mathrm{cl}_M(A)|$ は有限.

このような M を $(\mathbf{K}, \leq)$-ジェネリック構造という.

往復論法より，M, N が共に $(\mathbf{K}, \leq)$-ジェネリック構造ならば $M \cong N$ となる．また，ジェネリック構造 M は閉集合上超均質（すなわち，$B, B' \leq M$ かつ $B \cong B'$ ならば $\mathrm{tp}(B) = \mathrm{tp}(B')$）であることも確かめられる.

有限閉包性，次元，自由融合　ジェネリック構造 M は定義より常に有限閉包性をもつが，$\mathrm{Th}(M)$ のモデルがすべて有限閉包性をもつとは限らない．実際，Evans-Wong の例 (Example 6.1) はそのような例になっている．そこで理論 $\mathrm{Th}(M)$ のすべてのモデルが有限閉包性をもつとき，その理論は有限閉包性をもつという．

M を理論が有限閉包性をもつジェネリック構造とし，$\mathcal{M}$ をそのビッグモデルとする．有限の $A \subset \mathcal{M}$ に対し

$$d(A) = \delta(\mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(A))$$

と定義する．また，有限の $A, B \subset \mathcal{M}$ に対し，$d(A/B) = d(A \cup B) - d(B)$ と表記する．無限の B に対しては

$$d(A/B) = \inf\{d(A/B_0) : B_0 \text{ is a finite subset of } B\}$$

と定義する．

$B \cap C \subset A$ をみたす構造 A, B, C に対して，B と C が A 上自由であるとは

$$R^{ABC} = R^{AB} \cup R^{AC} \text{ for each } R \in L$$

をみたすこととする．記号で $B \perp_A C$ と書く．$B \perp_A C$ であるとき，構造 $B \cup C$ を B と C の A 上の自由融合といい，$B \oplus_A C$ と書く．

2 Lemmas

$A \subset B$ に対して, $A \preceq B$ を

$$\delta(X/A \cap X) \geq 0 \text{ for any finite } X \subset B$$

で定義する．$A \leq B$ との違いに注意する．

Lemma 2.1 (Evans [2]) M をその理論が有限閉包性をもつジェネリック構造とする．$\bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{M}$ とし，$A \subset \mathcal{M}$ を有限集合とする．このとき次は同値.

1. $d(\bar{b}/\bar{c}A) = d(\bar{b}/A)$

2. $\mathrm{cl}(\bar{b}A) \cap \mathrm{cl}(\bar{c}A) = \mathrm{cl}(A), \mathrm{cl}(\bar{b}A) \perp_{\mathrm{cl}(A)} \mathrm{cl}(\bar{c}A)$, $\mathrm{cl}(\bar{b}A) \cup \mathrm{cl}(\bar{c}A) \preceq \mathcal{M}$.

Proof. 簡単のため，$\mathrm{cl}(A) = A$ とする．$B = \mathrm{cl}(\bar{b}A), C = \mathrm{cl}(\bar{c}A)$ とする．このとき

$$
\begin{aligned}
& d(\bar{b}/\bar{c}A) = d(\bar{b}/A) \\
\Leftrightarrow\ & \delta(\mathrm{cl}(BC)/C) = \delta(B/A) \\
\Leftrightarrow\ & \delta(\mathrm{cl}(BC)/C) = \delta(B/C) = \delta(B/B \cap C) = \delta(B/A) \\
\Leftrightarrow\ & \delta(\mathrm{cl}(BC)) = \delta(BC),\ \delta(B/C) = \delta(B/B \cap C),\ \delta(B \cap C) = \delta(A) \\
\Leftrightarrow\ & BC \preceq \mathcal{M},\ B \perp_{B \cap C} C,\ B \cap C = A
\end{aligned}
$$

Remark 2.2 各 $i = 0, 1, 3$ に対して，$A_i \subset A'_i$ は有限であり，A'_0, A'_1, A'_2 は互いに素であるとき，$\delta(A_1/A_0) - \delta(A_1/A_0A_2) \leq \delta(A'_1/A'_0) - \delta(A'_1/A'_0A'_2)$.

Lemma 2.3 M をその理論が有限閉包性をもつジェネリック構造とする．$\bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{M}, A \subset \mathcal{M}$ とする．このとき $d(\bar{b}/\bar{c}A) = d(\bar{b}/A)$ ならば次が成り立つ．

1. $\mathrm{cl}(\bar{b}A) \perp_{\mathrm{cl}(A)} \mathrm{cl}(\bar{c}A)$

2. $\mathrm{cl}(\bar{b}A) \cup \mathrm{cl}(\bar{c}A) \preceq \mathcal{M}$

Proof 簡単のため，$\mathrm{cl}(A) = A$ とする．$B = \mathrm{cl}(\bar{b}A), C = \mathrm{cl}(\bar{c}A)$ とする．

まず $BC \preceq \mathcal{M}$ を示す．そうでないとすると，ある有限集合 $B_0 \subset B, C_0 \subset C$ に対して

$$\delta(Y/B_0C_0) < 0$$

をみたす有限な $Y \subset \mathrm{cl}(B_0C_0) - BC$ が存在．$\bar{b} \in B_0$ と仮定して構わない．$\gamma = -\delta(Y/B_0C_0)$ とする．ここで，有限閉集合 $A_0 \subset A$ を，

$$\mathrm{d}(B_0/A_0) - \mathrm{d}(B_0/A) < \gamma/2$$

$$\mathrm{d}(C_0/A_0) - \mathrm{d}(C_0/A) < \gamma/2$$

をみたすようにとる．$B_1 = \mathrm{cl}(B_0A_0), C_1 = \mathrm{cl}(C_0A_0)$ とする．仮定より $d(\bar{b}/AC_0) = d(\bar{b}/A)$ が成り立つので，

$$d(B_0/AC_0) = d(\bar{b}/AC_0) = d(\bar{b}/A) = d(B_0/A).$$

よって

$$\begin{aligned}
d(B_1C_1/A_0) &= d(B_0C_0/A_0) \\
&\geq d(B_0C_0/A) \\
&= d(B_0/AC_0) + d(C_0/A) \\
&= d(B_0/A) + d(C_0/A) \\
&> d(B_0/A_0) + d(C_0/A_0) - \gamma \\
&= \delta(B_1/A_0) + \delta(C_1/A_0) - \gamma \\
&\geq \delta(B_1C_1/A_0) - \gamma
\end{aligned}$$

を得る．一方，

$$\begin{aligned}
d(B_1C_1/A_0) &= d(B_0C_0/A_0) \\
&\leq \delta(YB_0C_0/A_0) \\
&= \delta(B_0C_0/A_0) + \delta(Y/B_0C_0) \\
&= \delta(B_0C_0/A_0) - \gamma
\end{aligned}$$

となりこれは矛盾.

次に $B \perp_A C$ を示す．そうでないとすると，

$$\delta(B_0/C_0) < \delta(B_0/B_0 \cap C_0)$$

をみたす有限集合 $B_0 \subset B, C_0 \subset C$ が存在．$A_0 = B_0 \cap C_0$ とする．$\gamma = \delta(B_0/A_0) - \delta(B_0/C_0)$ とする．$A_0 \subset A_1 \subset A$ となる有限閉集合 A_1 を，

$$d(B_1/A_1) - d(B_1/A) < \gamma$$

をみたすようにとる．$B_1 = \mathrm{cl}(A_1B_0)$ とする．このとき Remark 2.2 より

$$\begin{aligned}
\gamma &= \delta(B_0/A_0) - \delta(B_0/C_0) \\
&\leq \delta(B_1/A_1) - \delta(B_1/C_0A_1) \\
&\leq d(B_1/A_1) - d(B_1/C_0A) \\
&< d(B_1/A) + \gamma - d(B_1/C_0A) \\
&= \gamma
\end{aligned}$$

これは矛盾.

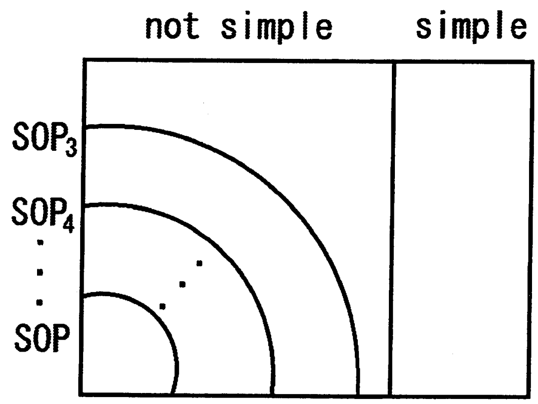
3 Strong order properties

Definition 3.1 (Shelah [10]) T を完全な理論，$\mathcal{M}$ をそのビッグモデルとする．

1. $n \geq 3$ とする．このとき T が SOP_n（n-strong order property）をもつとは，無限鎖をもつが n-サイクルをもたない方向グラフが定義可能なことである．すなわち，ある論理式 $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ が存在して
   (a) $\models \phi(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$ for $i < j \in \omega$ をみたす $\mathcal{M}$ の無限列 $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ が存在
   (b) $\models \neg\exists \bar{x}_0 ... \bar{x}_{n-1}(\phi(\bar{x}_0, \bar{x}_1) \wedge \phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \wedge ... \wedge \phi(\bar{x}_{n-1}, \bar{x}_0))$
2. SOP_n の否定を $NSOP_n$ と書く．
3. T が SOP（strict order property）をもつとは，無限鎖をもつ部分順序が定義可能なことである．

Remark 3.2 1. $SOP \Rightarrow \cdots \Rightarrow SOP_4 \Rightarrow SOP_3 \Rightarrow$ not simple，が成り立つことが知られている ([10]).

2. 上の定義の 1 において，「無限列 $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$」は「一様列 $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$」に置き換えても同値になる．さらに，一様列は ϕ のパラメータさえ含んでいればどこの上の一様列でもよい．



4 Evans-Wong's Result

Assumption 4.1 (Evans-Wong [3]) L は relational な可算言語で，各自然数 n に対し n-項関係が高々有限個であるとする．このとき次の条件をみたす関数 $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ を考える：

1. f は連続，単調増加，かつ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

2. $\mathbf{K}_f$ を $\delta(B) \geq f(|B|)$ for every $B \subset A$ をみたす有限 L 構造 A のクラスとする．このとき $(\mathbf{K}_f, \leq)$ は自由融合に関して閉じている：$A \leq B \in \mathbf{K}_f$ かつ $A \leq C \in \mathbf{K}_f$ ならば $B \oplus_A C \in \mathbf{K}_f$.

2 より，$(\mathbf{K}_f, \leq)$-ジェネリック構造 M_f が存在する．1 および L のとり方により，$\mathrm{Th}(M_f)$ は ω-範疇的になる．

Example 4.2 (Hrushovski [8]) Hrushovski は SU ランク 1 をもつ supersimple なジェネリック構造 M_f を作った：$L = \{R(*, *, *)\}$，$\alpha_R = 1$，$f(x) = \log_3 x + 1$ とする．このとき f は Assumption 4.1 をみたすことが確かめられる．さらに，M_f は「independence theorem over closed sets」をみたす．このことから $\mathrm{Th}(M_f)$ が simple であることがわかる．実際，$\mathrm{Th}(M_f) SU$ ランク 1 をもつ supersimple な理論となる．

Theorem 4.3 (Evans-Wong [3]) M_f は Assumption 4.1 をみたすジェネリック構造とする．このとき $\mathrm{Th}(M_f)$ は $NSOP_4$ をみたす．

5 Theorem

Assumption 5.1 L は relational な可算言語とする．$A \subset B$ に対して，$A \leq B$ を $\delta(X/X \cap A) > 0$ for any finite $X \subset B$ と定義する．$\mathbf{K}_0$ をその部分構造の δ の値がすべて 0 以上である有限 L-構造のクラスとする．あるクラス $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_0$ に対して，M を $(\mathbf{K}, \leq)$-ジェネリック構造とし，$\mathcal{M}$ をそのビッグモデルとする．

Definition 5.2 $A \subset \mathcal{M}$ とする．

1. $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{M}$ とする．このとき $\bar{a}$ と $\bar{b}$ が A 上独立（d-独立）であるとは，$d(\bar{a}/\bar{b}A) = d(\bar{a}/A)$ かつ $\mathrm{cl}(\bar{a}A) \cap \mathrm{cl}(\bar{b}A) = \mathrm{cl}(A)$ をみたすことである．記号で $\bar{a} \downarrow^d_A \bar{b}$ と書く．

2. $\bar{a}_0, ..., \bar{a}_n \in \mathcal{M}$ とする．このとき $\bar{a}_0, ..., \bar{a}_n$ が A 上独立であるとは，各 $i \leq n$ に対して $\bar{a}_i \downarrow_A^d \bar{a}_0 ... \bar{a}_{i-1}$ をみたすことである．

Remark 5.3 上で定義した「独立性（d-独立性）」は必ずしも「対称性」や「推移性」をみたすとは限らない．しかし，我々の仮定の下（ジェネリック構造の理論が有限閉包性をもつ）では，有限集合上で「対称性」および「推移性」をみたす．実際，Lemma 2.1 より有限集合 A 上において次が確かめられる．

1. $\bar{b} \downarrow_A^d \bar{c} \quad \Leftrightarrow \quad d(\bar{b}/\bar{c}A) = d(\bar{b}/A)$
2. $\bar{b} \downarrow_A^d \bar{c} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{c} \downarrow_A^d \bar{b}$ （対称性）
3. $\bar{b} \downarrow_A^d \bar{c}\bar{d} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{b} \downarrow_A^d \bar{c}$ かつ $\bar{b} \downarrow_{\bar{c}A}^d \bar{c}\bar{d}$ （推移性）

Remark 5.4 $\bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{M}, A \subset \mathcal{M}$ が

1. $A \leq \mathrm{cl}(\bar{b}A), A \leq \mathrm{cl}(\bar{c}A)$
2. $\mathrm{cl}(\bar{b}A) \perp_A \mathrm{cl}(\bar{c}A)$

をみたすとき

$$\mathrm{cl}(\bar{b}(\mathrm{cl}(\bar{b}\bar{c}) \cap A)) = \mathrm{cl}(\bar{b}\bar{c}) \cap \mathrm{cl}(\bar{b}A)$$
$$\mathrm{cl}(\bar{c}(\mathrm{cl}(\bar{b}\bar{c}) \cap A)) = \mathrm{cl}(\bar{b}\bar{c}) \cap \mathrm{cl}(\bar{c}A)$$

が成り立つ．

Proof. 表記を簡単にするため

$$B = \mathrm{cl}(\bar{b}A), C = \mathrm{cl}(\bar{c}A)$$

$$B_1 = \mathrm{cl}(\bar{b}\bar{c}) \cap B, C_1 = \mathrm{cl}(\bar{b}\bar{c}) \cap C, A_1 = \mathrm{cl}(\bar{b}\bar{c}) \cap A$$
$$B_0 = \mathrm{cl}(\bar{b}A_1), C_0 = \mathrm{cl}(\bar{c}A_1)$$

とおく．今，結論が成り立たないとすると，$B_0 \neq B_1$ または $C_0 \neq C_1$．よって

$$B_1 \cup C_1 \neq B_0 \cup C_0$$

が成り立つ．一方，$B_1 \cup C_1 \subset \mathrm{cl}(B_0 \cup C_0)$ に注意すると，

$$\delta(X/B_0 \cup C_0) \leq 0$$

となる $X \subset B_1 \cup C_1 - B_0 \cup C_0$ が存在. さらに X はそのようなものの中で包含関係に関して極小になるようにとる. $X^b = X \cap B, X^c = X \cap C$ とする. このとき, $B \perp_A C$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\delta(X/B_0 \cup C_0) &= \delta(XB_0/C_0) - \delta(B_0/C_0) \\
&= \delta(X^b X^c B_0/C_0) - \delta(B_0/C_0) \\
&= \delta(X^b B_0/X^c C_0) + \delta(X^c/C_0) - \delta(B_0/C_0) \\
&= \delta(X^b B_0/A_0) + \delta(X^c/C_0) - \delta(B_0/A_0) \\
&= \delta(X_b/B_0) + \delta(X^c/C_0) \\
&> 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

これは矛盾.

Lemma 5.5 M をその理論が有限閉包性をもつジェネリック構造とする. このとき, 有限集合 A 上の一様列 $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ に対して, $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2$ は C 上一様かつ独立となるような有限閉集合 $C(\supset A)$ が存在する.

Proof $I = (\bar{a}_i : i \in \omega)$ は $\emptyset$ 上の一様列とする. この一様列を拡張した一様列を $(\bar{a}_i : i \in \mathbb{Z})$ とする. $J = (\bar{a}_i : i < 0)$ とおく. このとき各 $i \in \omega$ に対して

$$d(\bar{a}_{i+1}/\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_i J) = d(\bar{a}_{i+1}/J)$$

が成り立つ. Erdös-Rado の定理より, 異なる $i_0, i_1, i_2 \in \omega$ に対して,

$$\mathrm{cl}(\bar{a}_{i_0}\bar{a}_{i_1}J) \cap \mathrm{cl}(\bar{a}_{i_2}J) \text{ は一定 } (= B)$$

であるとしてよい. さらには, I は B 上一様であると仮定してもよい. このとき

$$d(\bar{a}_2/\bar{a}_0 a_1 B) = d(\bar{a}_2/B)$$

が成り立つことに注意. Lemma 5.3 より

$$\mathrm{cl}(\bar{a}_2 B) \perp_B \mathrm{cl}(\bar{a}_0\bar{a}_1 B)$$

$$\mathrm{cl}(\bar{a}_2 B) \cup \mathrm{cl}(\bar{a}_0\bar{a}_1 B) \preceq \mathcal{M}$$

を得る. ここで $C = \mathrm{cl}(\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_2) \cap B$ とおくと, C はあきらかに有限閉集合. $E_2 = \mathrm{cl}(\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_2) \cap \mathrm{cl}(\bar{a}_2 B), E_{01} = \mathrm{cl}(\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_2) \cap \mathrm{cl}(\bar{a}_0 a_1 B)$ とおく. B のとり方より,

$$\mathrm{cl}(\bar{a}_0\bar{a}_1 B) \cap \mathrm{cl}(\bar{a}_2 B) = \mathrm{cl}(\bar{a}_0\bar{a}_1 J) \cap \mathrm{cl}(\bar{a}_2 J) = B$$

が成り立っていることに注意すると

$$E_2 \cap E_{01} = C$$

を得る．また，最初の二つの条件式より

$$E_2 \perp_C E_{01}$$

$$E_2 \cup E_{01} \preceq \mathcal{M}$$

も得られる．Remark 5.4 より

$$E_2 = \mathrm{cl}(\bar{a}_2 C), E_{01} = \mathrm{cl}(\bar{a}_0 \bar{a}_1 C)$$

が成り立つ．よって Lemma 2.1 より $d(\bar{a}_2/\bar{a}_0\bar{a}_1 C) = d(\bar{a}_2/C)$. I は C 上でも一様なので，$\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2$ は C 上 d-独立.

Theorem 5.6 M をその理論が有限閉包性をもつジェネリック構造とする．このとき $\mathrm{Th}(M)$ は $NSOP_4$ をもつ.

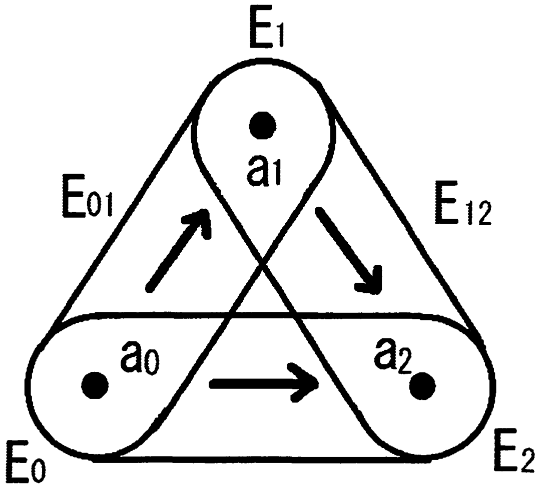
Proof $I = (\bar{a}_i)_{\in\omega}$ を任意の一様列とする．簡単のため，I は $\emptyset$ 上一様とする．$p(\bar{x}_0\bar{x}_1) = \mathrm{tp}(\bar{a}_0\bar{a}_1)$ とおく．$\mathrm{Th}(M)$ が $NSOP_4$ をもつことを示すためには

$$p(\bar{x}_0\bar{x}_1) \cup p(\bar{x}_1\bar{x}_2) \cup p(\bar{x}_2\bar{x}_3) \cup p(\bar{x}_3\bar{x}_0) \text{ が解をもつ}$$

ことを示せば十分．Lemma 5.5 より，$\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2$ は有限閉集合 C 上独立．$E_i = \mathrm{cl}(\bar{a}_i C)$，$E_{ij} = \mathrm{cl}(\bar{a}_i \bar{a}_j C)$ とおく．また，$E = E_{01}E_{12}$ とおく.

Claim: $E_0E_2 = E_0 \oplus_C E_2$ および $E_0E_2 \leq E$ が成り立つ.

Proof of Claim $\bar{a}_0 \downarrow^d_C \bar{a}_2$ より，$E_0E_2 = E_0 \oplus_C E_2$ はあきらか．また Remark 5.3 より，$\bar{a}_1 \downarrow^d_{\bar{a}_0 C} \bar{a}_2$ および $\bar{a}_1 \downarrow^d_{\bar{a}_2 C} \bar{a}_0$ を得る．よって $E_{01} \cap E_{02} = E_0$ かつ $E_{12} \cap E_{02} = E_2$．したがって $E_0E_2 = E \cap E_{02} \leq E$. (End of Proof of Claim)



いま $\mathrm{tp}(\bar{a}_0/C) = \mathrm{tp}(\bar{a}_2/C)$ より，$E_0 \cong_C E_2$ はあきらか．よって，E_0 と E_2 を C 上入れ換える同型写像 $\sigma : E_0E_2 \to E_0E_2$ が存在．σ の定義域を E まで拡大した同型写像を σ' とする．ここで，$E \cap \sigma'(E) = E_0E_2$ かつ $E \perp_{E_0E_2} \sigma'(E)$ が成り立っているとしてもよい．よって $F = E \oplus_{E_0E_2} \sigma'(E)$ とすると，融合性より $F \in \mathbf{K}$ が成り立つ．M はジェネリックであるので，$\tau(F) \leq M$ をみたす埋め込み写像 τ が存在．そこで

$$\bar{a}'_0 = \tau(\bar{a}_0), \bar{a}'_1 = \tau(\bar{a}_1), \bar{a}'_2 = \tau(\bar{a}_2), \bar{a}'_3 = \tau(\sigma'(\bar{a}_1)), C' = \tau(C)$$

とおく．このとき

$$\mathrm{cl}(\bar{a}'_0\bar{a}'_1C') \cong \mathrm{cl}(\bar{a}_0\bar{a}_1C), \mathrm{cl}(\bar{a}'_1\bar{a}'_2C') \cong \mathrm{cl}(\bar{a}_1\bar{a}_2C),$$
$$\mathrm{cl}(\bar{a}'_2\bar{a}'_3C') \cong \mathrm{cl}(\bar{a}_0\bar{a}_1C), \mathrm{cl}(\bar{a}'_3\bar{a}'_0C') \cong \mathrm{cl}(\bar{a}_1\bar{a}_2C).$$

はあきらか．ジェネリック構造の超均質性より

$$\mathrm{tp}(\bar{a}'_0\bar{a}'_1C') = \mathrm{tp}(\bar{a}_0\bar{a}_1C), \mathrm{tp}(\bar{a}'_1\bar{a}'_2C') = \mathrm{tp}(\bar{a}_1\bar{a}_2C),$$
$$\mathrm{tp}(\bar{a}'_2\bar{a}'_3C') = \mathrm{tp}(\bar{a}_0\bar{a}_1C), \mathrm{tp}(\bar{a}'_3\bar{a}'_0C') = \mathrm{tp}(\bar{a}_1\bar{a}_2C).$$

が成り立つ．よって $\bar{a}'_0\bar{a}'_1\bar{a}'_2\bar{a}'_3$ は $p(\bar{x}_0\bar{x}_1) \cup p(\bar{x}_1\bar{x}_2) \cup p(\bar{x}_2\bar{x}_3) \cup p(\bar{x}_3\bar{x}_0)$ の解となることが示された．

Remark 5.7 一般に，ジェネリック構造の理論が可算範疇的ならば有限閉包性をもつことがわかる．Evans-Wong の結果の仮定より，特に M_f は可算範疇的である (Assumption 4.1)．よって，Theorem 5.6 は Evans-Wong の結果 (Theorem 4.3) の一般化になっていることがわかる．また，Example 6.2 より，これが真の一般化になっていることもわかる．

6 Examples

Example 6.1 (Evans-Wong [3]) SOP をもつジェネリック構造が存在する：L を 3 項関係 R のみからなる言語とし，$\alpha_R = 1$ とする．M を $(\mathbf{K}_0, \leq)$-ジェネリック構造とする．このときビッグモデル $\mathcal{M}$ のある 2 点の閉包は無限になる．よってこの理論は有限閉包性をもたない．さらに 2 点をうまく選べば，その閉包の中に無限線形順序が定義できる．よって $\mathrm{Th}(M)$ は SOP をもつ．特に SOP_4 をもつ．

Example 6.2 Assumption 5.1 をみたすジェネリック構造で，理論が有限閉包性をもち ω-categorical でないものが存在する．この構成法は Herwig の例 ([5]) の単純理論版である．

L を互いに素な可算個の 2 項関係 $\{R_i\}_{i\in\omega}$ からなる言語とする．また

$$\delta_i(A) = |A| - \sum_{j=0}^{i} \alpha_j |R_j^A|$$

とおく．このとき，関数 $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ と自然数列 $(n_i)_{i\in\omega}, (k_i)_{i\in\omega}$ を次をみたすように帰納的に定義する：

(a) $n_0 = 1, k_0 = 2$;
(b) $n_i | n_{i+1}$ for each $i \in \omega$;
(c) $\alpha_i = 1/n_i$ for each $i \in \omega$;
(d) $k_i(2k_i - 1)\alpha_{i+1} < \epsilon_i$, where $\epsilon_i = \min\{\delta_i(A) - f(|A|) : \delta_i(A) > f(|A|), k_{i-1} \leq |A| \leq k_i\}$;
(e) $f(x) = \alpha_i \log(x/k_i) + f(k_i)$ for $k_i \leq x \leq k_{i+1}$ where $f(k_{i+1}) \geq i + 2$.

このとき次が成り立つことが確かめられる：

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
2. $(\mathbf{K}_f, \leq)$ は自由融合に関して閉じている；
3. 任意の $A \in \mathbf{K}_f$ に対して次をみたす $\phi \in L(A)$ が存在する：

$$A \subset B \in \mathbf{K}_f \text{ かつ } B \models \phi \text{ ならば } A \leq B.$$

1 は (e) よりあきらか．

2 を示す．$A, B, C \in \mathbf{K}_f$ を $A \leq B$ かつ $A \leq C$ をみたすようにとる．このとき

$$B \perp_A C$$

$$|B| \leq |C|$$

$$(\exists i)(k_i \leq |C| \leq k_{i+1})$$

と仮定しても一般性を失わない．$D = B \oplus_A C$ とおく．$D \in \mathbf{K}_f$ を示すには

$$\delta(D) > f(|D|)$$

を示すのが本質的．よってこれを示す．$C \in \mathbf{K}_f$ であるので

$$\delta_i(C) \geq \delta(C) > f(|C|)$$

をみたす．(b),(c), (e) より

$$(\delta_i(C) - \delta_i(A))/(|C| - |A|) \geq (1/n_i)/|C| = \alpha_i/|C| = f'(|C|)$$

が成り立つ．よって

$$\delta_i(D) > f(|D|)$$

を得る．一方，(d) より

$$\delta_i(D) - \delta(D) \leq (1/2)|D|(|D| - 1)\alpha_{i+1} \leq k_i(2k_i - 1)\alpha_{i+1} < \epsilon_i$$

が成り立つ．よって ϵ_i の定義より

$$\delta(D) > f(|D|)$$

を得る．

3を示す．任意の $A \in \mathbf{K}_f$ をとる．ここで，$A \leq_n B$ を

$$A \leq A \cup X \text{ for any } X \subset B - A \text{ with } |X| \leq n.$$

で定義する．1より，ある $n_A \in \omega$ が存在して，$A \leq_{n_A} B \in \mathbf{K}_f$ ならば $A \leq B$. 一方，$\lim_{i\to\infty} \alpha_i = 0$ なので，各 $n \in \omega$ に対して，ある ϕ_n が存在して，$B \models \phi_n$ ならば $A \leq_n B$. よって求める $\phi = \phi_{n_A}$ が得られた．

2より，$(\mathbf{K}_f, \leq)$-ジェネリック構造 M が存在する．1より，$\mathrm{Th}(M)$ は有限閉包性をもつ．3より，$A \leq \mathcal{M}$ は定義可能である．よって $\mathrm{Th}(M)$ は閉集合上超均質となり，M は飽和構造となる．

一方，$a \perp b$ かつ $ab \leq \mathcal{M}$ ならば $\mathrm{tp}(ab)$ は

$$\{\neg R_i(x, y) : i \in \omega\} \cup \{xy \leq \mathcal{M}\}$$

で生成される．特に，$\mathrm{tp}(ab)$ は有限個の論理式で生成されることはない．よって $\mathrm{Th}(M)$ は可算範疇的でないことがわかる．

最後に $\mathrm{Th}(M)$ が非安定であることを示す．$A, B, C, D \in \mathbf{K}_f$ を

$$A = B \cap C, B \perp_A C$$

$$A \leq B \leq D, A \leq C \leq D$$

$$B \cup C \preceq D, B \cup C \not\leq D$$

をみたすようにとる．ここで $A \leq C \leq \mathcal{M}$ であると仮定してよい．$C \leq D \in \mathbf{K}_f$ であるので，$D_1 \leq \mathcal{M}$ となる $D_1 \cong_C D$ が存在する．B_1 を $B_1 D_1 \cong BD$ をみたすようにとる．一方，$C \leq CB \in \mathbf{K}_f$ なので，$CB_2 \leq \mathcal{M}$ となる $B_2 \cong_C B$ が存在する．このとき

$$\mathrm{tp}(B_1/A) = \mathrm{tp}(B_2/A), B_1 \downarrow_A C, B_2 \downarrow_A C, \mathrm{tp}(B_1/C) \neq \mathrm{tp}(B_2/C)$$

を得る．我々の構成法より

$$A = \mathrm{cl}(A) = \mathrm{acl}(A)$$

が成り立つので，$\mathrm{Th}(M)$ は非安定となる．

Question 6.3 ジェネリック構造で，その理論が $NSOP + SOP_4$ をみたすものが存在するか．

References

[1] J. Baldwin and N. Shi, Stable generic structures, Annals of Pure and Applied Logic 79 (1996) 1–35

[2] D. Evans, $\aleph_0$-categorical structures with a predimension, Annals of Pure and Applied Logic 116 (2002) 157–186

[3] D. Evans and M. Wong, Some remarks on generic structures, Journal of Symbolic Logic 74 (2009) 1143–1154

[4] J. Goode, Hrushovski's geometries, In Helmut Wolter Bernd Dahn, editor, *Proceedings of 7th Easter Conference on Model Theory* (1989) 106–118

[5] B. Herwig, Weight ω in stable theories with few types, Journal of Symbolic Logic 60 (1995) 353–373

[6] E. Hrushovski, A stable $\aleph_0$-categorical pseudoplane, 1988, unpublished notes

[7] E. Hrushovski, A new strongly minimal set, Annals of Pure and Applied Logic 62 (1993) 147-166

[8] E. Hrushovski, Simplicity and the Lascar group, 1997, unpublished notes

[9] D. Kueker and M. Laskowski, On generic structures, Notre Dame Journal of Formal Logic 33(1992) 147–166

[10] S. Shelah, Toward classifying unstable theories, Annals of Pure and Applied Logic 80 (1996) 229–255

[11] F. Wagner, Relational structures and dimensions, In *Automorphisms of first-order structures*, Clarendon Press, Oxford (1994) 153–181